

Funzioni reali di due variabili reali



Definizione

- Se consideriamo una coppia di numeri reali X, Y e ad essi facciamo corrispondere un altro numero reale Z , allora abbiamo determinato una funzione reale di due variabili reali.
- Una funzione reale di due variabili reali è un'applicazione che associa ad ogni punto P di un dato sottoinsieme del piano cartesiano un numero reale.

Esempio:

La funzione $f(x,y)=4x-2y+3$ associa al punto $P(5,6)$ del piano il valore reale $f(5,6)=4 \cdot 5 - 2 \cdot 6 + 3 = 11$.

La stessa funzione associa al punto $Q(1,4)$ il valore reale $f(1,4)=4 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 3 = -1$

Definizione

Si dice funzione reale di due variabili reali x e y una relazione che associa ad ogni coppia ordinata di numeri reali (x, y) uno ed un solo numero reale z

Per indicare che la variabile z è funzione delle variabili x e y si scrive:

$$z = f(x, y) \quad \text{oppure} \quad f : (x, y) \rightarrow z$$

con $(x, y) \in D$ e $z \in \mathbb{R}$ dove D è un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 x e y si dicono *variabili indipendenti*, z si dice *variabile dipendente*.

Notazioni

Una funzione in due variabili è generalmente indicata con la seguente notazione

$$f : (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow z \in \mathbb{R}$$

L'intero insieme dei punti del piano si indica con \mathbb{R}^2 ; cioè, l'insieme di coppie ordinate di numeri reali (che si può indicare anche come $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

L'insieme D del piano è detto dominio della funzione ed è un sottoinsieme di \mathbb{R}^2

Più brevemente, la funzione può essere indicata anche come $z=f(x,y)$

NOTA BENE: ad ogni COPPIA di numeri reali (x,y) appartenente a D corrisponde UN SOLO numero reale z .

Dominio e codominio di una funzione

Data la funzione $z = f(x; y)$ con $(x, y) \in D$ e $z \in R$

Il sottoinsieme D di $R \times R$ è detto **dominio o insieme di definizione o campo di esistenza** della funzione.

L'insieme C dei valori assunti dalla variabile z si dice **codominio della funzione**.

Dominio di una funzione

Non a tutte le coppie di numeri reali è detto che corrisponda un numero reale: il dominio è il sottoinsieme di piano dei punti per cui è possibile calcolare un numero z che vi corrisponda

Esempi:

- a) $f(x, y) = \sqrt{x+y}$: è possibile calcolare il valore di questa funzione solo quando è definita la radice, il che accade quando il radicando è non negativo ($x \geq 0$). Il dominio sarà, pertanto costituito dai punti (x, y) con ascissa non negativa, cioè dai punti del primo e del quarto quadrante, compreso l'asse y .
- b) $f(x, y) = x + y - 2$: è possibile calcolare il valore di questa funzione per qualunque punto del piano. Il dominio sarà, pertanto l'intero piano cartesiano.

Si dice **campo di esistenza o dominio** di una funzione $z = f(x; y)$ l'insieme di tutte le coppie $(x; y)$ appartenenti a $R \times R$ per le quali la funzione è definita

Per determinare il dominio di una funzione reale di due variabili reali, come nel caso delle funzioni di una sola variabile, dobbiamo tenere presenti le principali regole di esistenza:

o Una funzione razionale intera esiste per qualunque $(x; y)$ appartenente a $R \times R$

o Una funzione razionale fratta esiste se il suo denominatore è diverso da zero

o Una funzione irrazionale (con l'indice della radice pari) esiste se il suo argomento è positivo o nullo

o Una funzione irrazionale (con l'indice della radice dispari) esiste qualunque sia il valore del suo argomento

o Una funzione logaritmica esiste se il suo argomento è positivo

Esempi

1. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$z = 5x + 2y - 5$$

Si tratta di una funzione di due variabili razionale intera dove ciascuna delle due variabili può assumere tutti i valori reali, quindi il campo di esistenza è $\{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

2. Data la funzione $z = \sqrt{xy}$ determinarne il dominio

Trattandosi di una funzione irrazionale il radicando deve essere positivo o nullo, quindi si deve porre $xy \geq 0$. Questo si verifica quando x e y sono entrambe positive o entrambe negative. Quindi il **dominio** è rappresentato da tutti i punti che appartengono al primo ed al terzo quadrante compresi i punti degli assi coordinati.

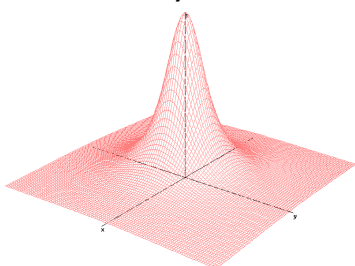
3. Calcolare il dominio della funzione $z = \frac{2x + 3}{x^2 + y^2 - 25}$

Essendo una funzione razionale fratta il denominatore deve essere diverso da zero. Quindi il dominio è rappresentato da tutti i punti del piano che **non appartengono alla circonferenza** con centro nell'origine e raggio 5



Per calcolare il dominio delle funzioni di due variabili è necessario saper operare con le disequazioni e i sistemi di disequazioni in due variabili

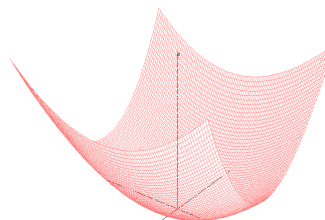
$$z = \frac{8}{x^2 + y^2 + 1}$$



Notiamo che il **dominio** di questa funzione è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in quanto il denominatore della frazione non è mai nullo

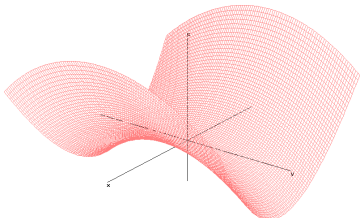
PARABOLOIDE ELLITTICO

$$z = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18}$$



Il **dominio** di questa funzione è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

PARABOLOIDE IPERBOLICO

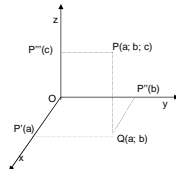
$$z = \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18}$$


Il dominio di questa funzione è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Coordinate cartesiane ortogonali nello spazio

Fissiamo nello spazio:

- un punto O detto *origine*
- tre rette orientate non complanari passanti per O e a due a due perpendicolari che prendono il nome di *asse x*, *asse y*, *asse z*
- un segmento \underline{u} che chiamiamo *unità di misura*.

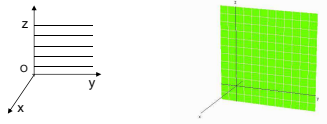


L'insieme degli elementi O, x, y, z, u costituisce un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio.

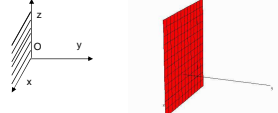
Nello spazio fissato un qualunque piano α esiste una equazione lineare in x y e z $ax+by+cz+d=0$ tale che i punti dello spazio che appartengono al piano α sono **tutti e soli quelli** le cui coordinate soddisfano l'equazione.

Ricordiamo i seguenti casi particolari:

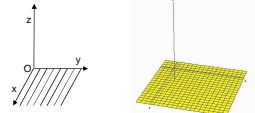
- $x=0$ rappresenta l'equazione del piano Oyz (ovvero l'insieme di tutti e soli i punti P(0; y; z) di ascissa zero con y e z numeri reali variabili)

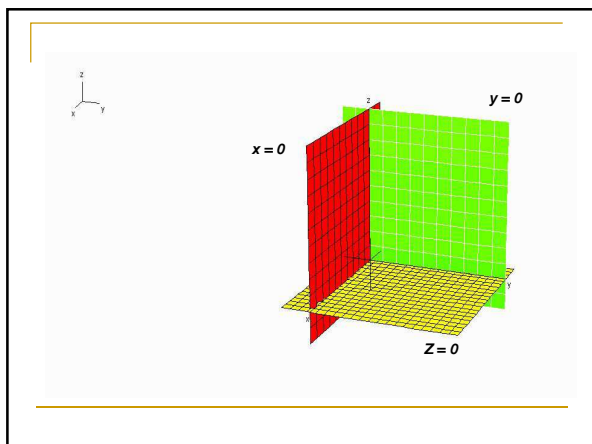


$y=0$ rappresenta l'equazione del piano Oxz (ovvero l'insieme di tutti e soli i punti P(x; 0; z) con x e z numeri reali)



$z=0$ rappresenta l'equazione del piano Oxy (ovvero l'insieme di tutti e soli i punti P(x; y; 0) con x e y numeri reali)





Piani particolari: $x = k$

$x = k$ rappresenta l'equazione di un piano parallelo al piano Oyz la cui distanza da esso è data dal valore assoluto di k (ovvero l'insieme di tutti e soli i punti $P(k; y; z)$ di ascissa k con y e z numeri reali variabili)

$x = -3$
 $x = 0$
 $x = 2$

Si tratta di piani paralleli al piano yz

Piani particolari: $y = k$

$y = h$ rappresenta l'equazione di un piano parallelo al piano Oxz la cui distanza da esso è data dal valore assoluto di h (ovvero l'insieme di tutti e soli i punti $P(x; h; z)$ di ordinata h con x e z numeri reali variabili)

$y = -3$
 $y = 0$
 $y = 1$

Si tratta di piani paralleli al piano xz

Piani particolari: $z = k$

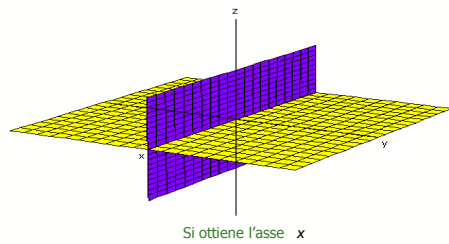
$z = t$ rappresenta l'equazione di un piano parallelo al piano Oxy la cui distanza da esso è data dal valore assoluto di t (ovvero l'insieme di tutti e soli i punti $P(x; y; t)$ con t fissato e x e y numeri reali variabili)

$z = 3$
 $z = 0$
 $z = -2$

Si tratta di piani paralleli al piano xy

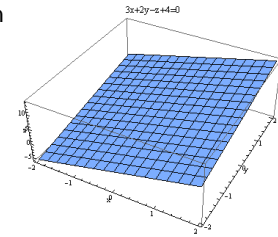
Intersezione tra due piani:

$$y = 0 \text{ e } z = 0$$

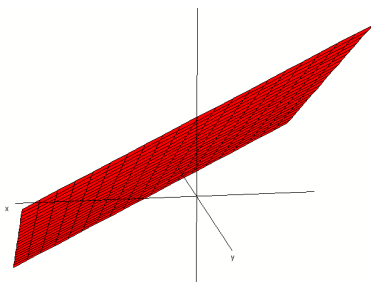
**Il piano**

Un'equazione lineare in 3 variabili rappresenta un piano dello spazio cartesiano.

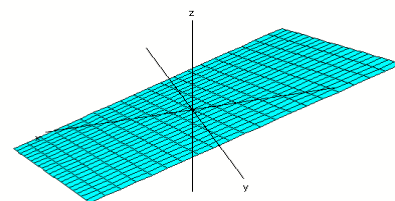
$ax+by+cz+d=0$
in cui a , b e c non sono contemporaneamente nulli

**Equazione generica di un piano:**

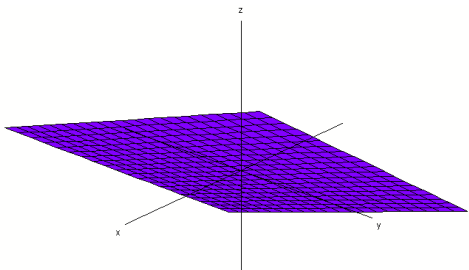
$$x - y + z - 3 = 0$$



$$x - y + z = 0$$



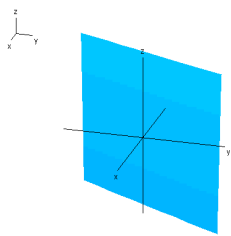
$2x + y - z = 0$



Se il piano passa per l'origine $\rightarrow d = 0$
Equazione generica: $ax + by + cz = 0$

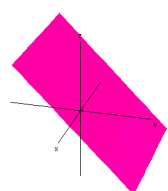
Se uno dei coefficienti delle variabili è nullo, allora il piano è parallelo all'asse la cui coordinata manca

$2x - y + 2 = 0$



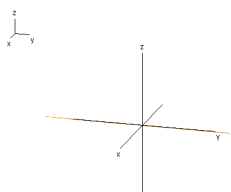
parallelo all'asse z

$y + z - 2 = 0$



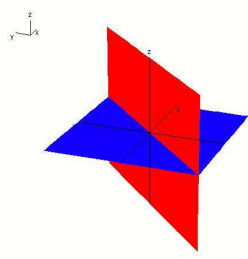
Parallelo all'asse x

$x - 3z = 0 \quad d=0$



Passante per l'origine e per l'asse y

Intersezione tra il piano $x = y$ e il piano $z = 0$



$y = x$
piano passante per l'asse z

Si ottiene, sul piano xy, la bisettrice del 1° e 3° quadrante $y = x$
Nello spazio una retta è l'intersezione di due piani