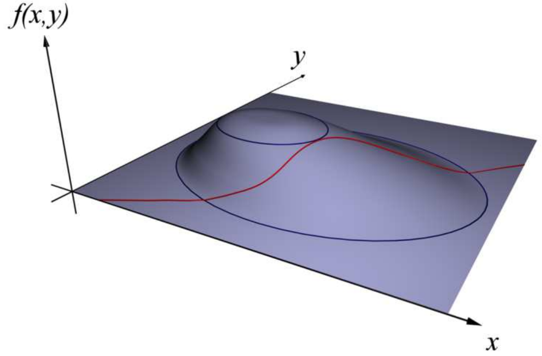
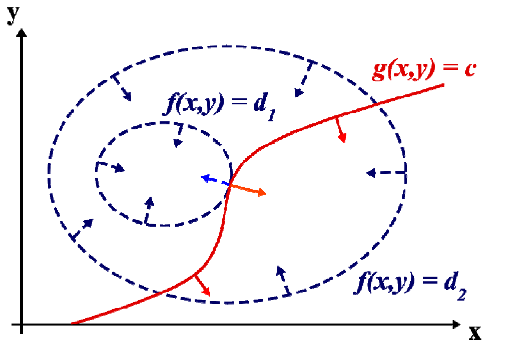
Metodi dell'analisi – Estremi vincolati

Vincolo espresso da equazione g(x,y) =0

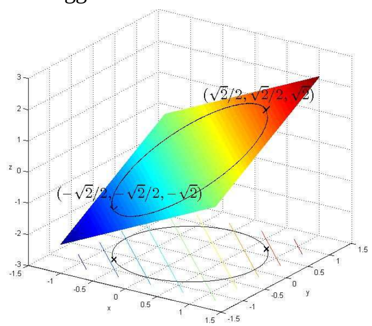


Rappresentazione mediante curve di livello del problema della figura 1. La linea rossa evidenzia il vincolo $g(x,y) = c$. Le linee blu rappresentano curve di livello di $f(x,y)$. La soluzione al problema è data dai punti di tangenza tra la linea rossa e le linee blu.



La determinazione degli estremi della funzione z = f(x,y) può essere fatta <u>in modo elementare</u> **<u>se l'equazione del vincolo è esplicitabile rispetto ad una delle due variabili.</u>**
In tal caso si ricava la variabile dal vincolo, si sostituisce nella funzione obiettivo che <u>diventa una funzione di una sola variabile</u> e quindi il problema viene ricondotto alla ricerca di estremi di una funzione in una variabile.
Se ciò non è possibile, si ricorre al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Supponi di voler massimizzare $f(x,y) = x + y$ sotto il vincolo $x^2 + y^2 = 1$. Il vincolo è il cerchio unitario, e le curve di livello della f sono rette diagonali (con pendenza -1), così si può vedere graficamente che il massimo viene raggiunto in $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e il minimo viene raggiunto in $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$



Si consideri il problema di ottimizzazione:
massimizzare $f(x, y)$
sotto il vincolo $g(x, y) = c.$
Introduciamo una nuova variabile (λ) chiamata moltiplicatore di Lagrange, e studiamo la funzione di Lagrange definita da:

$$\Lambda(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(g(x, y) - c),$$

I punti critici della funzione lagrangiana sono anche punti critici per la funzione iniziale *f*(*x*,*y*) che si intende studiare. In altre parole, se un punto (x_0,y_0) è di massimo/minimo/sella per la funzione lagrangiana, esso è un punto di massimo/minimo/sella anche per la funzione *f*(*x*,*y*).

Se **H(x$_o$,y$_o$, λ$_o$)>0**, in **P$_o$** la funzione ha un **massimo vincolato**;

Se **H(x$_o$,y$_o$, λ$_o$)<0**, in **P$_o$** la funzione ha un **minimo vincolato**;

Se **H(x$_o$,y$_o$, λ$_o$)=0**, non si può dire nulla e occorre studiare la funzione nei punti del vincolo "prossimi" a **P$_o$**.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & g'_x & g_y' & 0 & g'_x \\ g'_x & z''_{xx} & z''_{yx} & g'_x & z''_{xx} \\ g_y' & z''_{xy} & z''_{yy} & g_y' & z''_{xy} \end{array}$$

MAX E MIN CON LE DERIVATE.doc

$$\begin{cases} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \\ Z'_\lambda = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema fornisce le coordinate dei punti critici (P$_o$)
Un punto critico è un punto nel quale si annullano le derivate prime e può essere un massimo, un minimo o un punto di sella.

Per stabilire se questi punti sono massimi e/o minimi vincolati si va a costruire un determinante del terzo ordine che si chiama ***"hessiano orlato"*:**

$$\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g_y' \\ g'_x & z''_{xx} & z''_{yx} \\ g_y' & z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix}$$