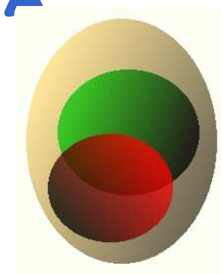
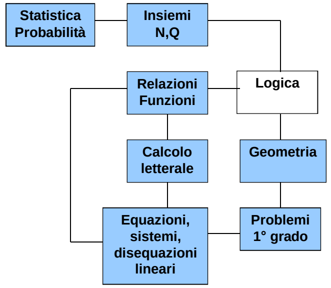
LA TEORIA DEGLI INSIEMI



1

La TEORIA DEGLI INSIEMI è strettamente connessa con molti settori della matematica



2

CHE COS'È UN INSIEME?

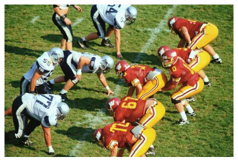
Nel linguaggio corrente ci sono numerose parole dal significato collettivo:

comunità, squadra, gregge, stormo, folla

- indicano un raggruppamento di persone, cose o animali

3

CHE COS'È UN INSIEME?



"INSIEME" è sinonimo di "collezione " o di "raggruppamento"

Si parla di un **INSIEME** quando si stabilisce un **criterio “oggettivo”** che permette di decidere senza equivoci se oggetti distinti “appartengono” o no a quell’insieme.

5

Ad esempio è un insieme matematicamente corretto l’insieme delle città della Lombardia.

Infatti tutti sanno riconoscere le differenti città della regione

Non è un insieme matematicamente corretto l’insieme dei ragazzi simpatici della classe.

Ciò perché la soggettivasimpatia di un compagno o di un altro è

6

Sono *insiemi in senso matematico*

- I quadrati con perimetro 200 cm
- Gli alunni di 16 anni della nostra scuola
- I capoluoghi di provincia della Campania

Non sono ***insiemi in senso matematico***

- I quadrati con un perimetro piccolo
- Gli alunni della nostra scuola che sono simpatici
- I capoluoghi di provincia più grandi d’Italia

7

PROVA TU

I seguenti raggruppamenti in matematica si possono considerare insiemi?

- le località di vacanza più belle d’Italia
- Le città della Campania con più di 10000 abitanti
- I rettangoli con perimetro 70 cm
- i divisori di 12
- le vocali della parola “ *matematica*”

L'insieme è un concetto primitivo:

esso è una collezione di oggetti (detti elementi) soddisfacenti tutti una stessa proprietà

(P(x)= proprietà caratteristica dell'insieme)

9

Simbologia

Gli insiemi sono indicati con lettere maiuscole, eventualmente munite di indici:

A, B, X, Y, A_1, A_2, B_1…

gli elementi degli insiemi con lettere minuscole, eventualmente munite di indici:

a, b, x, a_1, a_2, y_1 …

10

1) Rappresentazione tabulare

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

L'insieme A si può rappresentare elencando tutti gli elementi che gli appartengono

11

2) Rappresentazione per caratteristica

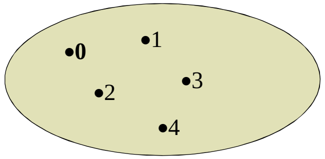
$$A = \{x \mid x \in N \;\; e \;\; x < 5\}$$

$$A = \{x \mid x \text{ è una vocale}\}$$

L'insieme A si può rappresentare indicando la proprietà caratteristica degli elementi dell'insieme

12

3) Rappresentazione con diagrammi di Eulero-Venn



L'insieme A si può rappresentare graficamente

13

PROVA TU

- **Rappresenta, per elencazione, l'insieme A= {x ∈N 2<x<9 }**
- **Rappresenta, mediante una proprietà caratteristica, l'insieme A= {1,3,5,7,9 }**
- **Rappresenta, mediante un diagramma di Venn, l'insieme B= {x x è una vocale della parola "*matematica*" }**

Il simbolo di appartenenza

Con il simbolo ∈ indichiamo l'appartenenza di un elemento a un insieme

Per indicare che *a* è un elemento dell'insieme *A* si scrive:

$a \in A$

si legge "***a* appartiene ad *A***".

Esempio

3∈N significa "3 appartiene all'insieme dei numeri naturali

Il simbolo di non appartenenza

Con il simbolo ∉ indichiamo la non appartenenza di un elemento a un insieme

Esempi

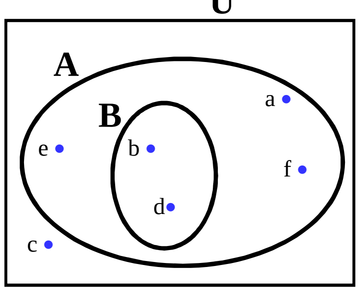
-3 ∉ **N significa "-3 non appartiene all'insieme dei numeri naturali"**

I simboli ∈ e ∉

B = {b; d}

A = {a; b; d; e; f}

U = {a; b; c; d; e; f}



$a \in A$, $a \in U$, $a \notin B$

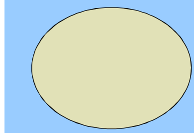
$b \in B$, $b \in A$, $b \in U$

$c \in U$, $c \notin B$, $c \notin A$

Alcune definizioni

Insieme vuoto:

se non contiene elementi



$\varnothing = \{\}$

Insieme finito:

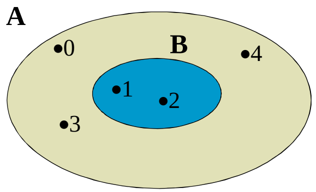
se è possibile contare tutti i suoi elementi e tale conta ha fine

Insieme infinito:

se non è finito

18

Un insieme può essere contenuto in un altro



Si dice allora che B è un sottoinsieme di A:

$$B \subseteq A$$

e si legge: "B è contenuto o è uguale ad A"

se ogni elemento di *B* è un elemento di *A* $\forall b \in B \Rightarrow b \in A$

19

Sottoinsiemi di un insieme

Si dice che un insieme **B** è sottoinsieme di un insieme **A**
o che **B** è ***contenuto*** in **A**
o che **A** ***contiene*** **A**,

se e solo se
tutti gli elementi di **A** sono elementi di **B**.

Sottoinsiemi di un insieme

Qualsiasi sia un insieme **A**, lo stesso **A** e l'insieme vuoto ∅ sono sottoinsiemi di **A** e si dicono

sottoinsiemi impropri di A

I sottoinsiemi di **A** diversi da A e da ∅ si dicono

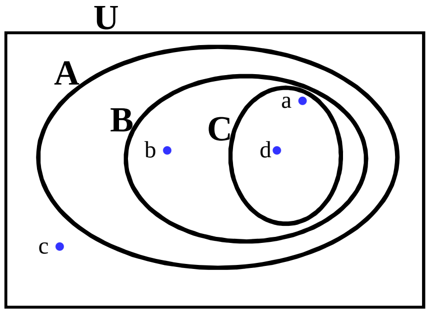
sottoinsiemi propri di A

INCLUSIONE ⊆, ⊂

B è un SOTTOINSIEME IMPROPRIO di A

Ogni insieme è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di sé stesso

L'insieme ∅ è un SOTTOINSIEME (IMPROPRIO) di ogni insieme



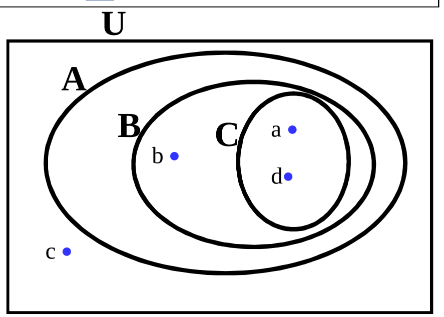
A ⊆ A, B ⊆ B,…..

∅ ⊆ C, ∅ ⊆ B, …..

INCLUSIONE ⊆, ⊂

A è un SOTTOINSIEME PROPRIO DI U

C è un SOTTOINSIEME PROPRIO DI B



B ⊆ A

A ⊆ A, B ⊆ B,…..

A ⊂ U

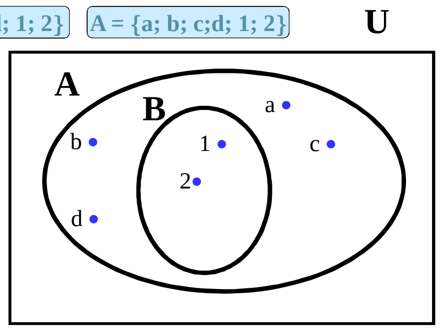
C ⊂ B

Sottoinsiemi

U = {a; b; c; d; 1; 2}

A = {a; b; c;d; 1; 2}

B = {1; 2}



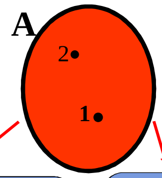
{1; 2} ⊆ B

{a; b; c} ⊂ A

{2} ⊂ B

APPARTENENZA e INCLUSIONE

APPARTENENZA | **INCLUSIONE**



$\in$ | $\subseteq$ | $\subset$

L'elemento 2 appartiene all'insieme A

$2 \in A$

L'insieme {2} è strettamente incluso nell'insieme A

$\{2\} \subset A$

L'insieme {1;2} è uguale ad A

$\{1;2\} \subseteq A$ oppure $\{1;2\} = A$

CONFRONTO TRA INSIEMI

Due insiemi A e B si dicono **uguali** se ogni elemento di A è anche elemento di B e viceversa:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A)$$

Due insiemi A e B si dicono **diversi** se esiste un elemento di uno dei due insiemi che non appartiene all'altro:

$$A \neq B$$

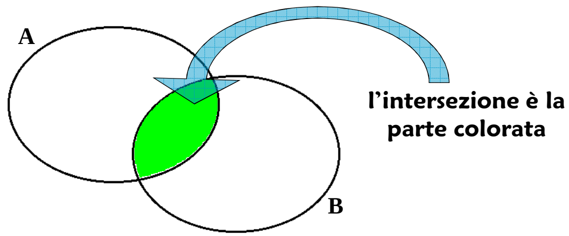
26

OPERAZIONI TRA INSIEMI

- **Intersezione**
- **Unione**
- **Differenza Complementare**
- **Prodotto Cartesiano**

27

Si definisce **intersezione** di due insiemi A e B, l'insieme formato dagli elementi comuni ad A e B.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

28

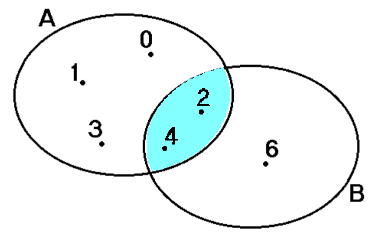
Dati ad esempio i due insiemi **A = {0,1,2,3,4}** e **B = {2,4,6}**, l'intersezione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$\mathbf{A \cap B = \{2, 4\}}$$

Il simbolo $\cap$ è il simbolo che caratterizza l'operazione. Si può leggere "**A** intersecato **B**" oppure "**A** e **B**".

29

Con i diagrammi di Venn, il risultato dell'esempio precedente sarà indicato così:



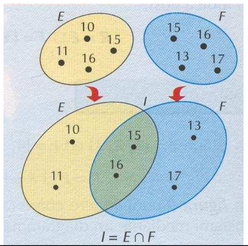
30

Esempio……

Siano E={10, 11, 15, 16},

F={13, 15, 16, 17},

Allora I = E $\cap$ F = {15, 16}



31

ATTENZIONE …………

$A \cap A = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap \underline{A} = \emptyset$

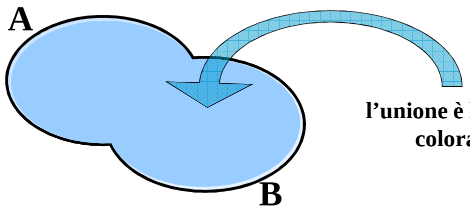
$A \cap U = A$

ATTENZIONE ....

Se A ∩ B = ∅
A e B si dicono DISGIUNTI

Se B ⊂ A allora A ∩ B = B

Si definisce **unione** di due insiemi A e B, l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi dati.



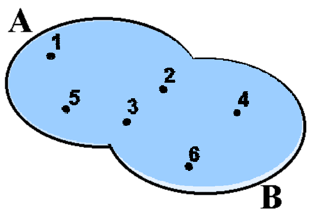
$A \cup B = \{x \mid x \in A \ o \ x \in B\}$

Dati ad esempio i due insiemi **A = {1,2,3,5}** e **B = {2,3,4,6}**, l'unione tra **A** e **B** è data dal seguente insieme:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Il simbolo ∪ è il simbolo che caratterizza l'operazione. Si può leggere "**A** unito **B**" oppure "**A** o **B**".

Con i diagrammi di Venn, il risultato dell'esempio precedente sarà:

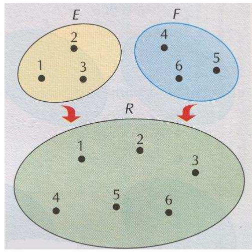


Esempio……

Siano E={1, 2, 3}

F={4, 5, 6},

Allora R = E ∪ F = {1, 2, 3, 4, 5, 6}



ATTENZIONE…….

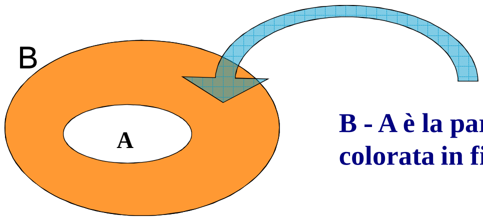
Se B ⊂ A allora A ∪ B = A

A ∪ A = A

A ∪ ∅ = A

A ∪ $\underline{A}$ = U

Si definisce **differenza complementare** fra due insiemi B ed A l'insieme degli elementi di B che non appartengono ad A.



B - A è la parte colorata in figura.

Si ha, per definizione:

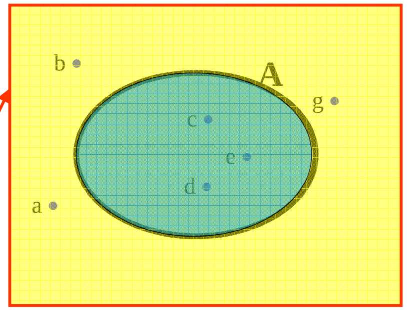
B – A = {*x* | *x* ∈ B *e* x ∉ A}

INSIEME COMPLEMENTARE

$\underline{A}$ = {x | x ∈ U e x ∉ A }

È l'insieme formato dagli elementi di U che non appartengono ad A

U



$\underline{A}$ ={a; b; g}

L'operazione di **differenza complementare** non soddisfa la proprietà commutativa, cioè:

$B-A \neq A-B$

Infatti…

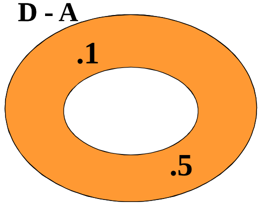
Dati ad esempio i due insiemi
B = **{1,2,3,5}** e A = **{2,3}**, accade che:

B - A = {1,5}

A - B = { }

Con i diagrammi di Venn, l'esempio precedente diventa:

D - A

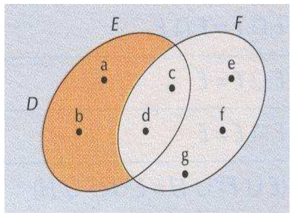


Esempio……

Siano E={a, b,c,d}

F={c, d, e, f, g},

Quindi D = E - F = {a, b}



Prodotto cartesiano

	1	2	3	4	5	6	7
a							
b							
c							
d							
e							
f							
g							
h							
i							

È lo schema della battaglia navale. Ogni casella è individuata da una coppia costituita da uno dei sette numeri e da una delle nove lettere. Le navi più piccole si trovano nelle caselle (7,i) e (1,c)

Prodotto cartesiano

	1	2	3	4	5	6	7
a							
b							
c							
d							
e							
f							
g							
h							
i							

Definiti gli insiemi
A = {*1,2,3,4,5,6,7* } e
B= {*a,b,c,d,e,f,g,h,i* }
lo schema si può identificare con l'insieme di tutte le coppie ordinate (x,y) con
x elemento di A
y elemento di B

Si definisce **prodotto cartesiano** tra due insiemi A e B non vuoti l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il 1° elemento ∊ ad A ed il 2° elemento ∊ a B.

Dati gli insiemi

A={2, 4} B={a,f}

AxB={(2,a);(2,f);(4,a);(4,f)}

Attenzione: per l'operazione **prodotto cartesiano** non vale la proprietà commutativa! AxB≠BxA

Infatti, dati gli insiemi

A={2, 4} B={a,f}

AxB={(2,a);(2,f);(4,a);(4,f)}

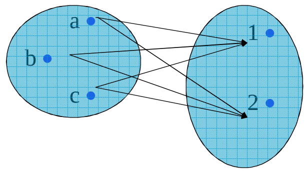
BxA={(a,2);(a,4);(f,2);(f,4)}

PRODOTTO CARTESIANO

$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$

Dati gli insiemi: A = {a, b, c,} e B = {1,2}

A x B = {(a,1),(a,2), (b,1),(b,2),(c,1),(c,2)}



INSIEME DELLE PARTI

Si dice INSIEME DELLE PARTI di un insieme A L'INSIEME DI TUTTI I SOTTOINSIEMI DI A.

Si scrive $\wp(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$ (*)

SI LEGGE: (*) P di A (l'insieme delle parti di A) è uguale all'insieme degli insiemi B tali che B è contenuto in A

INSIEME DELLE PARTI

esercizi

Elenca tutti i possibili sottoinsiemi dell'insieme:

$A=\{x \mid x<7 \wedge x=2n+1, n \in N\}$ $=\mathbf{\{1, 3, 5\}}$

$\wp(A)=\{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}, A\}$

Dati gi insiemi A={a,b,c,d} e B={a,e} scegli il simbolo opportuno da inserire ($\supset, \subset, =, \in, \notin$):

$\{a\} \subset A$	$\{b\} \in \wp(A)$
$A \in \wp(A)$	$\varnothing \in \wp(B)$
$\wp(A) \supset \{\{c\},\{d\}\}$	$\{\varnothing\} \subset \wp(B)$

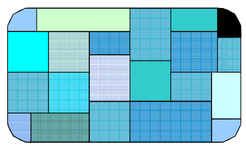
PARTIZIONE DI UN INSIEME

Si dice PARTIZIONE DI UN INSIEME A

UN INSIEME DI SOTTOINSIEMI DI A

- non vuoti
- disgiunti
- la cui unione coincide con A

A



Proprietà delle operazioni

Le operazioni di intersezione, unione e complementazione godono delle seguenti proprietà:

$$\left.\begin{array}{l} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{array}\right\} \text{Proprietà di idempotenza}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{array}\right\} \text{Proprietà commutativa}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \end{array}\right\} \text{Proprietà associativa}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{array}\right\} \text{Legge di assorbimento}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\} \text{Proprietà distributiva}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap \overline{A} = \varnothing \\ A \cup \overline{A} = U \end{array}\right\} \text{Complementarietà}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}\right\} \text{Leggi di De Morgan}$$

LA TEORIA DEGLI INSIEMI

Questa presentazione è una rielaborazione dei lavori di Iannone, Isidori, La Grotta visibili nel sito

www.atuttascuola.it

Progetto Digiscuola di Patrizia Dell'Isola

www.innovascuola.gov.it

www.itiscurie.it/webcurienew/materiale_did/6-insiemi.ppt