6 LE DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO FRAZIONARIE

Le **disequazioni di primo grado frazionarie** o **fratte** sono le disequazioni di primo grado in cui compare l'incognita a denominatore.
Una disequazione di primo grado frazionaria nell'incognita x si può sempre scrivere nella forma normale:

$$\frac{a(x)}{b(x)} > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{a(x)}{b(x)} < 0$$

in cui $a(x)$ e $b(x)$ sono polinomi di primo grado in x; può anche succedere che il numeratore sia semplicemente una costante, cioè un numero.
I denominatori di una disequazione frazionaria non si possono eliminare, applicando i princìpi di equivalenza, perché non si sa se sono positivi o negativi: quindi una disequazione frazionaria non si può trasformare in una disequazione equivalente intera e ciò significa che per risolverla non si può applicare il procedimento già visto per le disequazioni numeriche.
Per risolvere una disequazione lineare frazionaria si usa generalmente il seguente procedimento:

Procedimento di risoluzione

1) si scrive la disequazione nella forma normale:

$$\frac{a(x)}{b(x)} > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \frac{a(x)}{b(x)} < 0$$

2) si stabiliscono le condizioni di accettabilità delle soluzioni, escludendo i valori di x che rendono nulli i denominatori;

3) si studia come variano il segno del numeratore (N) e il segno del denominatore (D) al variare di x, ottenendo così una suddivisione del dominio in intervalli;

4) si rappresentano graficamente il segno del numeratore e il segno del denominatore;

5) dalla rappresentazione grafica, utilizzando la regola dei segni della divisione, si ricava in ciascun intervallo il segno della frazione, sulla base dei segni di N e di D;

6) si determinano gli intervalli delle soluzioni della disequazione, tenendo conto del verso della disequazione stessa.

ESEMPI

1 $\dfrac{2+x}{x-1} < 0$

La condizione di accettabilità delle soluzioni è $x \neq 1$.
Studiamo il segno del numeratore al variare di x, stabilendo quando è positivo:

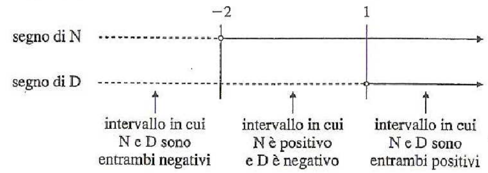
$$N > 0 \quad \rightarrow \quad 2 + x > 0 \quad \rightarrow \quad x > -2$$

Il numeratore è positivo nell'intervallo $x > -2$.
Studiamo il segno del denominatore al variare di x, stabilendo quando è positivo:

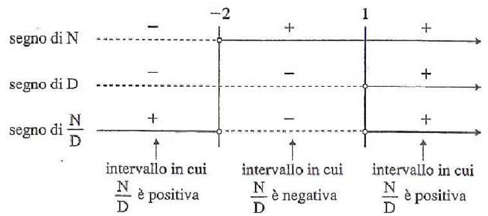
$$D > 0 \quad \rightarrow \quad x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1$$

Il denominatore è positivo nell'intervallo $x > 1$.

Rappresentiamo graficamente il segno di N e di D al variare di x (usando come al solito la retta intera negli intervalli in cui il segno è positivo e la retta tratteggiata negli intervalli in cui il segno è negativo) e delimitiamo con segmenti verticali gli intervalli in cui risulta suddiviso il dominio della disequazione:



Ricaviamo il segno del quoziente, cioè della frazione $\frac{N}{D}$, dalla rappresentazione grafica, sulla base dei segni di N e di D:



Poiché la disequazione $\dfrac{2+x}{x-1} < 0$ è verificata dai valori di x che rendono negativa (< 0) la frazione, l'insieme delle soluzioni della disequazione è rappresentato dall'intervallo del dominio in cui la frazione è negativa, cioè $-2 < x < 1$.

Per avere un quadro completo, analizziamo la rappresentazione grafica intervallo dopo intervallo e nei punti significativi che sono estremi degli intervalli:

$$\begin{cases} \text{per } x < -2 & \text{la frazione è positiva} \rightarrow \text{nessuna soluzione} \\ \text{per } x = -2 & \text{la frazione è nulla} \rightarrow -2 \text{ non è soluzione} \\ \text{per } -2 < x < 1 & \text{la frazione è negativa} \rightarrow \text{intervallo soluzione} \\ \text{per } x = 1 & \text{la frazione non ha senso} \\ \text{per } x > 1 & \text{la frazione è positiva} \rightarrow \text{nessuna soluzione} \end{cases}$$

2 $\dfrac{x+1}{x-2} > \dfrac{3}{4}$

Riduciamo in forma normale:

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{3}{4} > 0$$

$$\frac{4(x+1) - 3(x-2)}{4(x-2)} > 0$$

$$\frac{4x+4-3x+6}{4(x-2)}>0$$

$$\frac{x+10}{4(x-2)}>0$$

Possiamo eliminare il fattore 4, che è positivo, moltiplicando i due membri per 4:

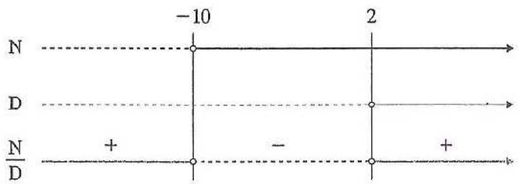
$$\frac{x+10}{x-2}>0$$

La condizione di accettabilità delle soluzioni è $x \neq 2$.
Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$N > 0 \quad x+10>0 \rightarrow x>-10$

$D > 0 \quad x-2>0 \rightarrow x>2$

Rappresentiamo graficamente i segni del N e del D e da essi ricaviamo, in ciascun intervallo, il segno della frazione:



Poiché la disequazione $\frac{x+10}{x-2}>0$ è verificata dai valori di x che rendono positiva la frazione, l'insieme delle soluzioni è rappresentato dai due intervalli in cui la frazione risulta positiva:

$x<-10 \quad$ e $\quad x>2$

Se analizziamo dettagliatamente la rappresentazione grafica possiamo dedurre quanto segue:

$$\begin{cases} \text{per } x<-10 & \text{la frazione è positiva} \rightarrow \text{intervallo soluzione} \\ \text{per } x=-10 & \text{la frazione è nulla} \rightarrow -10 \text{ non è soluzione} \\ \text{per } -10<x<2 & \text{la frazione è negativa} \rightarrow \text{nessuna soluzione} \\ \text{per } x=2 & \text{la frazione non ha senso} \\ \text{per } x>2 & \text{la frazione è positiva} \rightarrow \text{intervallo soluzione} \end{cases}$$

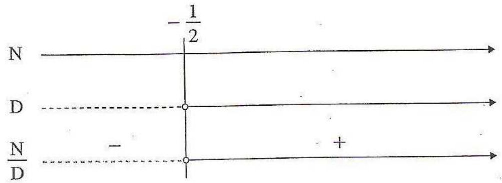
3 $\frac{3}{2x+1} \leqslant 0$

Il numeratore della frazione non contiene l'incognita.
La condizione di accettabilità delle soluzioni è $2x+1 \neq 0$, cioè $x \neq -\frac{1}{2}$.
Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$N \geqslant 0 \quad \rightarrow \quad$ sempre verificato: N è sempre positivo

$D > 0 \quad 2x+1>0 \quad \rightarrow \quad 2x>-1 \quad \rightarrow \quad x>-\frac{1}{2}$

(il caso D = 0 non può essere incluso, perché renderebbe priva di senso la frazione)



L'insieme delle soluzioni della disequazione è l'intervallo $x<-\frac{1}{2}$.

171 $\frac{x-5}{x+3} \leqslant 0$ $\quad [-3<x\leqslant 5]$

172 $\frac{x-4}{x+3}>0$ $\quad [x<-3 \text{ e } x>4]$

173 $\frac{2x}{x+4}>0$ $\quad [x<-4 \text{ e } x>0]$

174 $\frac{5}{x-1} \geqslant 0$ $\quad [x>1]$

175 $\frac{2}{(x-1)^2} \geqslant 0$ $\quad [\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1]$

176 $\frac{1}{x} \leqslant 0$ $\quad [x<0]$

177 $\frac{3}{(x-2)^2}<0$ $\quad$ [impossibile]

178 $\frac{x}{x+2}<0$ $\quad [-2<x<0]$

179 $\frac{x}{x-1} \geqslant 0$ $\quad [x\leqslant 0 \text{ e } x>1]$

180 $\frac{2-x}{x+4} \geqslant 0$ $\quad [-4<x\leqslant 2]$

181 $-\frac{1-3x}{4x-3}<0$ $\quad \left[\frac{1}{3}<x<\frac{3}{4}\right]$

182 $\frac{4+10x}{4-3x}<0$ $\quad \left[x<-\frac{2}{5} \text{ e } x>\frac{4}{3}\right]$

183 $\frac{4}{3x} \leqslant -8$ $\quad \left[-\frac{1}{6}\leqslant x<0\right]$

184 $\frac{6}{3x}>\frac{12}{9}$ $\quad \left[0<x<\frac{3}{2}\right]$

185 $\frac{1-x}{3x}-1 \geqslant 0$ $\quad \left[0<x\leqslant\frac{1}{4}\right]$

186 $\frac{2}{4+x}>-\frac{3}{2}$ $\quad \left[x<-\frac{16}{3} \text{ e } x>-4\right]$

187 $\frac{3}{8}<\frac{-5}{2x-4}$ $\quad \left[-\frac{14}{3}<x<2\right]$

188 $\frac{2}{3}-\frac{10}{3-x}>0$ $\quad [x<-12 \text{ e } x>3]$

189 $-\frac{1}{2x-1}>-\frac{1}{3}$ $\quad \left[x<\frac{1}{2} \text{ e } x>2\right]$

190 $\frac{6}{x-3}-\frac{5}{2}>0$ $\quad \left[3<x<\frac{27}{5}\right]$

191 $5-\frac{1+2x}{2x-1} \geqslant 0$ $\quad \left[x<\frac{1}{2} \text{ e } x\geqslant\frac{3}{4}\right]$

192 $\frac{24}{3x-1}<-1$ $\quad \left[-\frac{23}{3}<x<\frac{1}{3}\right]$

193 $\frac{2}{x}-\frac{6}{2x} \leqslant -2$ $\quad \left[0<x\leqslant\frac{1}{2}\right]$

194 $\frac{15x}{7+x}-15 \geqslant 0$ $\quad [x<-7]$

195 $\frac{2x}{1+x} \geqslant -3$ $\quad \left[x<-1 \text{ e } x\geqslant-\frac{3}{5}\right]$

196 $\frac{9}{5x+10}<\frac{18}{2x+4}$ $\quad [x>-2]$

197 $\frac{2}{x-1} \geqslant \frac{2x}{1-x}$ $\quad [x\leqslant -1 \text{ e } x>1]$

198 $\frac{3x^2-1}{3-x}+3x \geqslant 0$ $\quad \left[\frac{1}{9}\leqslant x<3\right]$

199 $\frac{1}{x}+\frac{25-25x}{3x} \leqslant 0$ $\quad \left[x<0 \text{ e } x\geqslant\frac{28}{25}\right]$

200 $\frac{3x+5}{2x-4}+1<\frac{1}{4-2x}$ $\quad \left[-\frac{2}{5}<x<2\right]$

201 $\frac{2}{1-x}<\frac{x}{x-1}+1$ $\quad \left[x<-\frac{1}{2} \text{ e } x>1\right]$

202 $\frac{x^2}{2-x}+2x \leqslant x$ $\quad [x\leqslant 0 \text{ e } x>2]$

203 $x^2+x \geqslant x^2\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$ $\quad [0\leqslant x<1]$

204 $\frac{9x^2-12x+4}{2x^2-8x+8} \geqslant 0$ $\quad [\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2]$

205 $\frac{2(x-2)^2}{-5+2x}+2 \geqslant x$ $\quad \left[x\leqslant 2 \text{ e } x>\frac{5}{2}\right]$

206 $\frac{2+2x}{-8-12x} \geqslant \frac{9x-6}{81x^2-36}$ $\quad \left[-\frac{5}{3}\leqslant x<-\frac{2}{3}\right]$

207 $\frac{5}{2}+\frac{3x-1}{2-2x} \leqslant 1-\frac{x+1}{2x-2}$ $\quad$ [impossibile]

208 $\frac{1-2x}{x-3}<x+3-\frac{x^2}{x-3}$ $\quad [x<3 \text{ e } x>5]$